ＭＡ　Hoermander 多変数複素解析を読む　講義報告[4]

２００８年6月２８日（土）　１４：００－１６：００

複素数値関数を項にもつ級数のノルム収束と正規収束を定義した。正則関数の展開定理におけるベキ級数の収束は、正規収束によるものである。次に正則関数の一致の定理と最大絶対値の定理の証明を行なった。

定義 1.5 (ノルム収束). E を空でない集合とするとき、集合 E 上で複素数値関数項の級数 $\sum_{\nu\geq 0} u_\nu$ が**ノルム収束**するとは、$\sum_{\nu\geq 0}\|u_\nu\|_E<\infty$ が成立することである。ただし、

$$\|u\|_E=\sup\{|u(x)|\mid x\in E\}$$

とする。

練習問題 1.3. E を位相空間、$C(E)$ を E 上の複素数値連続関数の全体とするとき、$\{u_\nu\}_{nu\geq 0}\subset C(E)$ でかつ、$\sum_{\nu\geq 0} u_\nu$ がノルム収束するならば、$\sum_{\nu\geq 0} u_\nu\in C(E)$

定義 1.6 (正規収束). $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ を開集合とするとき、Ω 上で複素数値関数項の級数 $\sum_{\nu\geq 0} u_\nu$ が**正規収束**するとは、Ω 内の任意のコンパクト集合 K に対して、$\sum_{\nu\geq 0}\|u_\nu\|_K<\infty$ が成立することである。すなわち、Ω 内の任意のコンパクト集合 K でノルム収束することである。

補題 1.1 ($Cauchy-Taylor$ の表現定理). $\Delta=\Delta(\vec{\boldsymbol{c}},\vec{\boldsymbol{r}}),\ f\in C(\partial_0\Delta)$ に対して、

$$\hat{f}(\vec{\boldsymbol{z}})=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0\Delta}\frac{f(\vec{\boldsymbol{\xi}})d\vec{\boldsymbol{\xi}}}{\vec{\boldsymbol{\xi}}-\vec{\boldsymbol{z}}}\quad for\ \forall z\in\Delta$$

とおくと、$\hat{f}\in C^\infty(\Delta)\cap\mathcal{A}(\Delta)$ で、

$$\partial^J\hat{f}(\vec{\boldsymbol{z}})=\frac{J!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0\Delta}\frac{f(\vec{\boldsymbol{\xi}})d\vec{\boldsymbol{\xi}}}{(\vec{\boldsymbol{\xi}}-\vec{\boldsymbol{z}})^{J+e}}$$

また、$\hat{f}(\vec{\boldsymbol{z}})=\sum_J\alpha_J(\vec{\boldsymbol{z}}-\vec{\boldsymbol{c}})^J$ という形に展開でき、

$$\alpha_J=\frac{\partial^J\hat{f}(\vec{\boldsymbol{c}})}{J!}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0\Delta}\frac{f(\vec{\boldsymbol{\xi}})d\vec{\boldsymbol{\xi}}}{(\vec{\boldsymbol{\xi}}-\vec{\boldsymbol{c}})^{J+e}}$$

系 1.4 (正則関数の展開定理). f を開集合 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上の正則関数とする。任意の $\vec{\boldsymbol{c}}\in\Omega$ に対して、$\overline{\Delta}\subset\Omega$ となるように、$\Delta=\Delta(\vec{\boldsymbol{c}},\vec{\boldsymbol{r}})$ をとると、f は Δ でベキ級数展開される。

$$f(\vec{\boldsymbol{z}})=\sum_J\alpha_J(\vec{\boldsymbol{z}}-\vec{\boldsymbol{c}})^J,\quad \alpha_J=\frac{\partial^J\hat{f}(\vec{\boldsymbol{c}})}{J!}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_0\Delta}\frac{f(\vec{\boldsymbol{\xi}})d\vec{\boldsymbol{\xi}}}{(\vec{\boldsymbol{\xi}}-\vec{\boldsymbol{c}})^{J+e}}$$

ここて、級数 $\sum_J\alpha_J(\vec{\boldsymbol{z}}-\vec{\boldsymbol{c}})^J$ は Δ で正規収束する。

定理 1.12 (一致の定理). f を連結開集合 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上の正則関数とするとき、

$$(\partial^J f)(\vec{\boldsymbol{c}})=0\quad for\ \forall J\neq\vec{0}$$

なる $\vec{\boldsymbol{c}}\in\Omega$ が存在するならば、f は Ω 上で定数である、

[4]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

系 1.5. f を連結開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上の正則関数とするとき、$\vec{c} \in \Omega$ の近傍で f が定数となるような $\vec{c} \in \Omega$ が存在するならば、f は Ω 上で定数である、

定理 1.13 (正則関数の最大絶対値の定理 ($Maximum\ Modulus\ Principal$)**).** f を連結開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上の正則関数とするとき、$|f|$ が $z_0 \in \Omega$ で最大値をとるのは、f が Ω 上で定数の場合に限る。

記録 by J.S